Лекция 4

ШАРТТЫ ЫҚТИМАЛДЫҚ. ТӘУЕЛСІЗДІК.

§1. Шартты ықтималдық. Ықтималдықтарды көбейту формуласы.

Айталық, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (дискретті) ықтималдық кеңістігі берілсін. Егер B оқиғасының пайда болғандығы белгілі және $P(B) > 0$ болса, онда одан бөлек қандай да бір A оқиғасының ықтималдығын қалай табуға болатындығы жөнінде есеп қарастыралық. Берілген жағдайда, әрине, B пайда болғандығы белгілі болғандықтан элементар оқиғалар кеңістігі ретінде Ω -ның орнына B -ны алу керектігі түсінікті, өйткені енді әңгіме тек B -ның пайда болуына әкеп соғатын элементар оқиғалар жайында ғана болуы тиісті. Жалпы жағдайда AB оқиғасы пайда болғаннан B оқиғасы пайда болатындығы шығады $(AB \subseteq B)$, бірақ егер B пайда болғаны белгілі болса, онда A -ның пайда болуына тек қана $\omega \in AB$ элементар оқиғалары ғана әкеп соғады. Біз бұрынырақта A оқиғасы мен A -ның пайда болуына әкеп соғатын элементар оқиғалар жиынын тепе-тең деп есептеуге келіскендіктен,енді A оқиғасы мен $A_B = AB$ оқиғасын тепе-тең деп есептеуіміз қажет. Басқаша айтқанда, егер B оқиғасын барлық элементар окиЄалар кеңістігі ретінде алсақ , онда A оқиғасы ретінде $A_B = AB$ оқиғасын (жиынын) алуымыз қажет.

Жаңа элементар оқиғалар кеңістігі B -дағы барлық оқиғалар жиынын $\mathcal{F}_B$ арқылы, ықтималдықты P_B арқылы белгілесек онда біз жаңа $(B, \mathcal{F}_B, P_B)$ ықтималдық кеңістігін алған болар едік (мұнда әрине $\mathcal{F}_B = \{A_B = AB : A \in \mathcal{F}\}$ және $P_B(B) = 1$)

Енді $A_B \in \mathcal{F}_B$ оқиғасының ықтималдығын былай анықтайық

$$P_B(A_B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1}$$

Бұл анықтамадан кез келген $A_B \in \mathcal{F}_B$ үшін $P_B(A_B) \geq 0$, $P_B(B) = 1$ және $A^i{}_B \in \mathcal{F}_B$, $A^i{}_B \cap A^j{}_B = \varnothing$ $(i \neq j)$ үшін $P_B\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A^i{}_B\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P_B\left(A^i{}_B\right)$ т.с.с. ықтималдықтың қасиеттерінің орындалатынына оп-оңай көз жеткізуге болады.

$P_B(\cdot)$ ықтималдығын неге (1) формула арқылы анықтағанымызды ықтималдықтың классикалық анықтамасы арқылы былай түсіндіруге болады. Бұл жағдайда $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $|\Omega| = n < \infty$ және де $P(\omega_i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}$. Айталық, енді $B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}\}$, $A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots, \omega_{j_s}\}$ болсын. Онда классикалық анықтама бойынша $P(B)=\frac{m}{n}$, $P(A)=\frac{s}{n}$ және егер $AB=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},\ldots,\omega_{k_r}\}$ болса, онда $r\le\min(m,s)$ және $P(AB)=\frac{r}{n}$. Егер B -ны жаңа элементар оқиғалар кеңістігі ретінде қарастырсақ, онда A_B оқиғасының ықтималдығы осы оқиғаның пайда болуына әкеп соғатын қолайлы жағдайлар (нәтижелер) саны r -дің барлық нәтижелер саны m -ге, яғни B -ның нәтижелер санына қатынасына тең. Енді классикалық анықтама бойынша

$$P_B(A_B)=\frac{|A_B|}{|B|}=\frac{r}{n}=\frac{r/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Екінші жағынан $P_B(\cdot)$ ықтималдығын бастапқы (Ω, F) кеңістігінде де қарастыруға болады. Бұл жағдайда оны әдетте $P(\cdot/B)$ арқылы белгілейді. Сонымен $A\in\mathrm{F}$ үшін

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (2)$$

Кез келген $A\in\mathrm{F}$ үшін $P(A/B)$ ықтималдығы A оқиғасының B оқиғасы пайда болған жағдайдағы *шартты ықтималдығы* деп аталады.

Ескерту. Шартты ықтималдықты (2) формула арқылы анықтауды ықтималдықтың статистикалық анықтамасын пайдаланып та негіздеуге болады. Шындығында да айталық n сынақ нәтижесінде A, B және AB оқиғалары сәйкес $n(A), n(B), n(AB)$ рет пайда болған болсын. Онда, егер B оқиғасы пайда болғаны белгілі болса онымен бірге A оқиғасының пайда болуының (яғни AB пайда болуының) *шартты салыстырмалы жилігі* $\frac{n(AB)}{n(B)}$ арқылы анықталатыны түсінікті. Егер жиіліктің орнықтылық қасиеті орындалса, онда

$$\frac{n(A)}{n}\approx P(A)\ , \quad \frac{n(B)}{n}\approx P(B)\ , \quad \frac{n(AB)}{n}\approx P(AB)$$

және $P(B)>0$ болса шартты салыстырмалы жиілік те орнықты және

$$\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{n(AB)/n}{n(B)/n}\approx\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Соңғы қатынасты, әрине, шартты ықтималдықты (2) формуламен анықтаудың негіздемесі ретінде қарастыруға болады.

Шартты $P(\cdot/B)$ ықтималдығының қасиеттері $P(\cdot)$ ықтималдығының қасиеттеріне ұқсас:

$$P(\Omega/B)=1\ ,$$

$$P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)\ ,$$

$$P\left(A_1 + A_2 + \ldots / B\right) = P\left(A_1 \ / \ B\right) + P\left(A_2 \ / \ B\right) + \ldots \quad ,$$

$$P\left(A \cup C \ / \ B\right) = P\left(A \ / \ B\right) + P\left(C \ / \ B\right) - P\left(AC \ / \ B\right)$$

Соңғы қасиетті дәлелделік. Анықтама бойынша

$$P\left(A \cup C \ / \ B\right) = \frac{P\left(\left(A \cup C\right)B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(AB \cup CB\right)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(AB) + P(BC) - P(ACB)}{P(B)} = P(A \ / \ B) + P(C \ / \ B) - P(AC \ / \ B)$$

Жоғарыда біз $AB \cup CB$ оқиғасының ықтималдығын табу үшін ықтималдықтарды қосу формуласын пайдаландық.

Ескерту. Біз $P(A \ / \ B) + P(\overline{A} \ / \ B) = 1$ болатынын көрдік, бірақ жалпы жағдайда

$$P(A \ / \ B) + P(A \ / \ \overline{B}) \neq 1$$

$$P(A \ / \ B) + P(\overline{A} \ / \ \overline{B}) \neq 1$$

болатындығын көрсету қиын емес (мысал келтіріңіз)

(2)формуладан *ықтималдықтарды көбейту формуласы* деп аталатын

$$P(AB) = P(B)P(A \ / \ B) \tag{3}$$

формуласын аламыз. Бұл формуланы оқиғалардың кез келген ақырлы санды көбейтіндісі үшін жалпыландыру қиын емес.

Тұжырымдама. Айталық $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары үшін $P(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$ болсын. Онда

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P\left(A_1\right)P\left(A_2 \ / \ A_1\right)P(A_3 \ / \ A_1 A_2)\ldots P(A_n \ / \ A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) \tag{3'}$$

Дәлелдеу. $(3')$ формуласының оң жағындағы барлық шартты ықтималдықтардың бар болатындығы тұжырым шартынан шығады (анығырақ айтсақ $P(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$ болғанынан $P(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) > 0, \ldots, P(A_1) > 0$ болатындығы шығады (дәлелдеңіз)). Әрі қарай индукцияны қолданамыз: $n = 2$ үшін $(3')$ формуласы (3) формуладан шығады, ал оның кез келген ақырлы n үшін дұрыстығын көрсету үшін $B = A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}$, $A = A_n$ оқиғалары үшін (3) формуланы және $n - 1$ үшін $(3')$ дұрыс болсын деген индукциялық ұйғарымды қолдану жеткілікті. ♦

Математикалық тұрғыдан алғанда $(3')$ формуласының мардымдылығы шамалы. Бірақ оның негізгі рөлі математикалық емес. Бұл формула есептің мағынасына байланысты шартты ықтималдықтарды оңай есептеуге болатын жағдайларда оқиғалардың көбейтіндісінің ықтималдығын табу үшін қолданылады.

Мысалдар

1) Екі баласы бар отбасыларын (жан ұяларды) қарастыралық. Сәйкес *ұ* және *қ* әріптері арқылы *ұл бала* және *қыз бала* дегенді белгілеуге келіселік. Онда элементар оқиғалар кеңістігін былай сипаттауға болады:

$$\Omega = \{ұұ, ұқ, құ, ққ\},$$

мұндағы "*ұқ*" балалардың үлкені *ұл,* кішісі *қыз* бала дегенді білдіреді т.с.с. Барлық нәтижелер тең ықтимал деп есептелік:

$$\mathrm{P}\ (ұұ) = \mathrm{P}\ (ұқ) = \mathrm{P}\ (құ) = \mathrm{P}\ (ққ) = \frac{1}{4}$$

Егер отбасында *ұл бала* бар екені (B оқиғасы) белгілі болса, онда балалардың екеуі де ұл бала (A оқиғасы) болу ықтималдығы неге тең

Шешуі. Біздің жағдайда

$$A = \{ұұ\}\ ,\ B = \{ұұ, ұқ, құ\}$$

Сондықтан $AB = A = \{ұұ\}$, $P(AB) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ демек (2) формула бойынша $\mathrm{P}(A / B) = \frac{1}{3}$. Сонымен екі баласының ең болмағанда біреуі ұл бала болатын отбасылардың шамамен әрбір үшіншісінде екі ұл бала бар болуын күтуге болады екен. Бір қарағанда есептің шешімі $\frac{1}{2}$ тең болатын секілді көрінеді. Бұл шешім мынадай басқа есептің дұрыс жауабы: кездейсоқ түрде таңдап алынған ұл бала екі баласы бар отбасының баласы болып шыққан болса, онда бұл от басының екінші баласының ұл бала болу ықтималдығы неге тең? Есептердің жауабының әртүрлі болуын былайша түсіндіруге болады: бірінші есепте біз екі баласы бар отбасыларын қарастырдық, екінші жағдайда біз тек ер адамдарды қарастырдық. Соңғы есепте екі ұлы бар әр отбасы екі рет қарастырылған, нәтиженің әр қилы болуын осымен түсіндіруге болады.

2) Нөмірленген әртүрлі n элементтен тұратын бас жиынтықтан бір-бірлеп қайтарусыз түрде екі элемент алынған. Егер бірінші рет i-ші элемент алынған (B оқиғасы) болса, онда екінші рет j-ші $(i \neq j)$ элемент (A оқиғасы) алыну ықтималдығы $P(A / B)$ неге тең? $P(AB) = ?$

Шешуі. Әрине $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{n}$, *ал* $\mathrm{P}(A / B) = \frac{1}{n-1}$ себебі екінші элементті алар алдында бас жиынтықта қалған элементтер саны бірге кеміді де $n - 1$ элемент қалды. Егер (3) формуланы пайдалансақ, онда бірінші рет i-ші рет элемент, екінші рет j-ші элемент алыну ықтималдығы $\mathrm{P}(AB) = \frac{1}{n(n-1)}$ болар еді. Егер алынған элементтер әр жолы кері қайтарылып отырған болса, онда

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{n}\ ,\ \mathrm{P}(AB) = \frac{1}{n^2}$$

болар еді.

3) Құтыда m-қара, $n-m$-ақ шар (барлыЄы $m+(n-m)=n$ шар) бар. Құтыдан бір-бірлеп қайтарусыз түрде екі шар алынған. Мына оқиғалардың ықтималдықтарын табыңыз:

а) бірінші алынған шар қара шар (A_1 оқиғасы)

ә) екінші алынған шар қара шар (A_2 оқиғасы)

б) екі шардың екеуі де қара шар (A_1, A_2 оқиғасы)

Шешуі. $\mathrm{P}(A_1)=\dfrac{m}{n}$ болатыны түсінікті. $\mathrm{P}(A_2)$ табу үшін A_2 оқиғасын мына түрде жазалық:

$$A_2 = A_2 A_1 + A_2 \overline{A_1}$$

Бұдан алдымен ықтималдықтарды қосу, сосын көбейту формулаларын пайдалансақ

$$\mathrm{P}(A_2)=\mathrm{P}(A_1 A_2)+\mathrm{P}\left(\overline{A_1}A_2\right)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2 / A_1)+\mathrm{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathrm{P}\left(A_2 / \overline{A_1}\right)=$$

$$=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}+\frac{n-m}{n}\cdot\frac{m}{n-1}=\frac{m}{n}$$

Біз жолай $\mathrm{P}(A_1 A_2)=\dfrac{m(m-1)}{n(n-1)}$ болатынын да көрсете кеттік.

Бұл есепте баса назар аударатын мәселе-ол A_1 және A_2 оқиғаларының тең ықтималдықты екені, яғни құтыдан қара шар алу ықтималдығының алу ретіне (бірінші немесе екінші рет) тәуелсіздігі. Мәселен, егер құтыдағы бастапқы n шарды n емтихан билеті ретінде, ал m-қара шарды m “бақытты” билет (студент жауап бере алатын билет) ретінде қарастырсақ, онда біз мынадай қортындыға келеміз: студент үшін “бақытты” емтихан билетін алу ықтималдығы оның емтиханға бірінші болып немесе екінші болып кіруіне тәуелсіз, яғни оған алдын-ала емтиханға ең бірінші болып немесе екінші болып кіру стратегияларының арасында таңдау жүргізудің еш қажеті жоқ; қаншасыншы (бірінші, екінші) болып кірсе де оның емтиханды сәтті тапсыру ықтималдығы өзгермейді- бұл ықтималдық оның емтиханға дайындығына ғана тәуелді (жалпы жағдай туралы төмендегі 8-есепті және келесі параграфты қараңыз)

4) Ішінде a ақ, b қара шары бар құтыдан үш ойыншы кезекпе- кезек бір-бір шардан алды. Ең бірінші ақ шарды кім алса сол жеңеді. Егер шарлар

а) құтыға әр жолы кері қайтарыла отырып

ә) қайтарусыз түрде

алынатын болса, онда 1-ші, 2-ші және 3-ші ойыншылардың сәйкес ұту ықтималдықтары неге тең?

Шешуі. A_i, B_i, C_i – арқылы сәйкес 1-ші, 2-ші, 3-ші ойыншы өзі i-рет шар алған кезде ақ шар алғанын білдіретін, ал $\overline{A_i}, \overline{B_i}, \overline{C_i}$ арқылы бұл оқиғаларға қарама-қарсы оқиғаларды белгілелік $(i = 1, 2, \ldots)$. Онда 1-ші, 2-ші, 3-ші ойыншы жеңді дегенді білдіретін A, B, C оқиғаларын былай өрнектеуге болады:

$$A = A_1 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{C}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{C}_1 \overline{A}_2 \overline{B}_2 \overline{C}_2 A_3 + \ldots$$

$$B = \overline{A_1} B_1 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{C}_1 \overline{A}_2 B_2 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{C}_1 \overline{A}_2 \overline{B}_2 \overline{C}_2 \overline{A}_3 B_3 + \ldots$$

$$C = \overline{A}_1 \overline{B}_1 C_1 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{C}_1 \overline{A}_2 \overline{B}_2 C_2 + \ldots$$

Шындығында да 1-ші ойыншы ұту үшін ол бірден ақ шарды алуы керек; егер ол бірінші рет қара шар алған болса, онда ойынды ұту үшін 2-ші және 3-ші ойыншылар да өз кезектерінде қара шар алулары керек те 1-ші ойыншы өзінің екінші алу ретінде (жалпы алу реті бойынша төртінші ретте) ақ шар алуы қажет т.с.с. Қалған жағдайлар да осы сияқты талданады. Ары қарай $\mathrm{P}(A)$ ықтималдығын есептеу үшін ықтималдықтарды қосу және көбейту формулаларын пайдаланамыз.Сонымен:

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}\left(\overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{C}_1 A_2\right) + \ldots =$$

$$= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathrm{P}\left(\overline{B}_1 / \overline{A}_1\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{C}_1 / \overline{A}_1 \overline{B}_1\right) \cdot \mathrm{P}\left(A_2 / \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{C}_1\right) + \ldots$$

а) жағдайында әр жолы құтыдағы шарлар құрамы өзгермейді де ақ шар алу ықтималдығы әр жолы $\frac{a}{a+b}$ тең болды. Сондықтан

$$\mathrm{P}_1 = \frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^3 \cdot \frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^6 \cdot \frac{a}{a+b} + \ldots =$$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{a+b}\right)^3} = \frac{(a+b)^2}{a^2 + 3ab + 3b^2}$$

Сол сияқты

$$\mathrm{P}_2 = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^4 \cdot \frac{a}{a+b} + \ldots = \frac{b(a+b)}{a^2 + 3ab + 3b^2} = \frac{b}{a+b} \cdot \mathrm{P}_1$$

$$\mathrm{P}_3 = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \cdot \frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^5 \cdot \frac{a}{a+b} + \ldots = \frac{b^2}{a^2 + 3ab + b^2} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \cdot \mathrm{P}_1$$

Әрине, $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3 = 1$ болғандықтан P_3 мәнін $1 - \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2$ арқылы да табуға болар еді.

ә) бұл жағдайда әр жолы алынған шар келесі шарды алар алдында құтыға кері қайтарылмайтын болғандықтан әр шарды алар алдында құтыдағы шарлардың құрамы өзгеріп (бір қара шарға кеміп) отырады. Осыны ескерсек

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}\left(A_1\right) + \mathrm{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathrm{P}\left(\overline{B}_1 \ / \ \overline{A}_1\right)\cdot \mathrm{P}\left(\overline{C}_1 \ / \ \overline{A}_1\overline{B}_1\right)\cdot \mathrm{P}\left(A_2 \ / \ \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1\right)+\ldots=$$

$$= \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}\cdot\frac{b-2}{a+b-2}\cdot\frac{a}{a+b-3}+\ldots = \frac{a}{a+b}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(b\right)_{3k}}{\left(a+b-1\right)_{3k}}$$

Мұндағы $(n)_r = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$ және $r > n$ болса $\left(n\right)_r = 0$ (яғни, P_1 есептегенде жоғарыдағы қатардың оң жағында шын мәнінде ақырлы қосынды тұр)

Дәл осы сияқты

$$\mathrm{P}_2 = \frac{ab}{\left(a+b\right)_2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(b-1\right)_{3k}}{\left(a+b-2\right)_{3k}}$$

$$\mathrm{P}_3 = \frac{a(b)_2}{\left(a+b\right)_3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(b-2\right)_{3k}}{\left(a+b-3\right)_{3k}}$$

Есептер.

1) $\{1,2,\ldots,n\}$ бас жиынтығынан бір-бірлеп қайтарусыз түрде үш сан алынған. Егер бірінші алынған санның екінші алынған саннан кіші екендігі белгілі болса, онда үшінші алынған санның алғашқы алынЄан екі санның ортасында жату ықтималдығы неге тең?

2) Үш ойын сүйегі лақтырылған. Егер ойын сүйектерінде әр түрлі ұпайлар түскені белгілі болса, онда оның біреуінде “6” ұпай түсу ықтималдығы неге тең?

3) Бес ойын сүйегін лақтырғанда ең болмағанда біреуінде “1” ұпай түскені белгілі. Осы ойын сүйектерінде ең болмағанда екі “1” түсу ықтималдығы неге тең?

4) Төрт шар төрт жәшікке кездейсоқ орналастырылған (барлық 256 үлестірім тең ықтималдықты). Егер алғашқы екі шар әр түрлі жәшіктерге түскені белгілі болса, онда жәшіктердің біреуіне дәл үш шар түсу ықтималдығы неге тең?

5) Ойын сүйегі қашан “1” ұпай түскенше лақтырыла береді. Бірінші рет лақтырғанда “1” ұпай түспеген. Ойын сүйегін ең болмағанда үш рет лақтыру қажет болу ықтималдығын табыңыз.

6) Алдыңғы есепте сынақтар саны n жұп сан болсын. $n = 2$ болуының ықтималдығы қандай?

7) Ішінде m ақ, $n-m$ қара шары бар құтыдан бір-бірлеп қайтарусыз (кездейсоқ) түрде r шар алынған. $A_0^{(i)}\left(A_1^{(i)}\right)-i$-ші шар қара (ақ) шар болатынын білдіретін оқиға болсын. Мына ықтималдықтарды табыңыз:

$$\mathrm{P}\left\{A_1^{(s+1)} \,/\, A_{q_1}^{(1)} A_{q_2}^{(2)} \ldots A_{q_s}^{(s)}\right\},\ q_i = 0 \ \text{немесе}\ 1$$

Егер алынған шарлар әр жолы құтыға кері қайтарылып отырса жоғарыдағы ықтималдықтар қалай өзгереді?

8) m қара, $n-m$ ақ шары бар құтыдан барлық шарлар бір-бірлеп қайтарусыз (кездейсоқ) түрде алынған. Мына оқиғалардың ықтималдықтарын табыңыз:

A_k – k-ші шар қара шар;

$B_{k,l}$ – k-ші және l-ші қара түсті;

$C_{k,l}$ – k-ші шар ақ , l-ші шар қара шар.

9) Ішінде n_1 ақ, n_2 қара, n_3 қызыл шары бар құтыдан шарлар бір-бірлеп қашан қызыл шар алынғанша (кездейсоқ) қайтарусыз түрде алынған. Мына оқиғалардың ықтималдықтарын табыңыз:

а) құтыдан m_1 ақ, m_2 қара шар алынды;

ә) құтыдан бірде-бір ақ шар алынған жоқ;

б) құтыдан барлығы k шар алынды.

10) Жеті шар жеті жәшікке кездейсоқ үлестірілген кезде дәл екі жәшіктің бос қалғаны белгілі. Онда жәшіктердің біреуіне үш шар түсу ықтималдығы $1/4$ тең болатынын көрсетіңіз.

Тәуелсіздік.

Екі немесе бірнеше тәжірибенің *тәуелсіздігі* ұғымы белгілі бір мағынада ықтималдықтар теориясында орталық орынды алады. Тарихи көзқарас тұрғысынан алғанда сынақтар мен кездейсоқ шамалардың тәуелсіздігі ұғымы ықтималдықтар теориясына өзіндік ерекшелік берген математикалық ұғым болды. Егер ықтималдықтар теориясындағы зерттеулерде тәуелсіздік ұғымынан бас тартуға тура келсе, онда мағыналы нәтижелер алу үшін оның орнына қандайда бір одан (тәуелсіздіктен) гөрі әлсізірек шарттар енгізуге мәжбүр боламыз. Міне, сондықтан да тәуелсіздік ұғымынан ықтималдықтар теориясының проблемаларының ең алғашқы өзіне тән ерекше бастауын көре аламыз. Тәуелсіздік ұғымының жоғарыдағыдай рөліне, ықтималдықтар теориясындағы ең іргелі ұғымдардың бірі екендігіне осы теорияның негізін қалаушы атақты математик А.Н.Колмогоровтың ерекше назар аударғанын оқушының есіне сала кетелік (Қараңыз: *А.Н.Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей* - Москва, изд.”Наука”,1974).

Біз төменде алдымен оқиғалардың тәуелсіздігі ұғымына тоқталамыз, сосын оны бөліктеулер және алгебралар, үшін анықтаймыз, ең соңында тәуелсіз сынақтарға тоқталамыз.

2.1. Оқиғалардың тәуелсіздігі.

(Ω, F, P) дискретті ықтималдықтар кеңістігі берілсін және $A, B \in \mathrm{F}$ оқиғалары берілсін. Егер A оқиғасының B оқиғасы пайда болған кездегі шартты ықтималдығы оның шартсыз ықтималдығына тең болса, яғни $\left(P(B) > 0\right)$

$$P\left(A / B\right) = P\left(A\right) \tag{1}$$

шарты орындалса, онда әрине A *оқиғасы* B *оқиғасына тәуелсіз* деуіміз орынды. Егер осылай болса, онда шартты ықтималдықтың формуласынан және (1) формуладан

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{2}$$

қатынасын аламыз. Айталық, енді $P(A) > 0$ болсын да, (1) шарт орындалсын. Онда (2) қатынасты еске алсақ

$$P(B / A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B), \tag{3}$$

яғни B оқиғасы да A оқиғасына тәуелсіз. Айтылғандардан мынадай қорытындыға келеміз: екі оқиғаның тәуелсіздігі ұғымы симметриялы ұғым - A оқиғасы B оқиғасына тәуелсіз болса, онда B оқиғасы да A оқиғасына тәуелсіз. Бірақ біз келтірген (1), (3) формулалардың бір кемшілігі бар- ол $P(A) > 0$ және $P(B) > 0$ болу қажеттігі шарттары, ал бұл шарттар жалпы жағдайда орындала бермейді де (ол туралы оқулықтың 2-бөлімінде толық айтылады). Сондықтан тәуелсіздіктің анықтамасы ретінде (1),(3) формулаларының салдары болып табылатын, бірақ $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ шарттарын қажет етпейтін (2) қатынасты аламыз. Сонымен

Анықтама. Егер A және B оқиғалары үшін олардың к-бейтіндісінің ықтималдығы олардың ықтималдықтарының к-бейтіндісіне тең болса, яғни (2) қатынас орындалса мұндай оқиғаларды *тәуелсіз оқиғалар* деп атаймыз.

Бұл анықтамадан егер $P(A) = 0$ немесе $P(B) = 0$ болса, онда мұндай A, B оқиғалары өзара тәуелсіз болатындығы шығады. Шындығында да, $AB \subseteq A$ және $AB \subseteq B$ болғандықтан $P(A) = 0$ немесе $P(B) = 0$ шарттарынан $0 \leq P(AB) \leq min\left(P(A), PB)\right)$=0, демек $P(AB) = 0$ шарты, яғни (2) шарт орындалатыны шығады. (Біз бұл жерде $C \subseteq D$ оқиғалары үшін $P(C) \leq P(D)$ теңсіздігі дұрыс болатынын пайдаландық).

Тәуелсіз оқиғаларға байланысты бірнеше қарапайым қасиеттерді тұжырым ретінде келтіре кетелік.

Тұжырым. **а)** Егер $P(B)>0$ болса, онда A мен B-ның тәуелсіздігі, яғни (2) шарт $P(A/B)=P(B)$ шартына эквивалентті.

ә) A және B оқиғалары тәуелсіз болса, онда $\overline{A},B$ және $\overline{A},\overline{B}$ оқиғалары да тәуелсіз.

б) $P(A)=0$ немесе $P(A)=1$ болса, онда A оқиғасы және кез келген B оқиғасы өзара тәуелсіз.

в) Егер A және B_1 оқиғалары тәуелсіз болса, A және B_2 оқиғалары тәуелсіз болса, сонымен бірге $B_1B_2=\varnothing$ болса, онда A және B_1+B_2 оқиғалары тәуелсіз оқиғалар.

Дәлелдеу. а) Берілген жағдайда (1) формуладан (2) формула шығатынын жоғарыда көрдік. Енді, егер (2) шарт орыдалса, онда

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A),$$

яғни (1) формула дұрыс.

ә) Бізге (2) шарттан

$$\begin{aligned} P(\overline{A}B)&=P(\overline{A})P(B)\\ P(\overline{A}\,\overline{B})&=P(\overline{A})P(\overline{B}) \end{aligned} \qquad (4)$$

шарттары шығатынын көрсету жеткілікті.

Шындығында да

$$B=AB+\overline{A}B, \qquad \boxed{\overline{A\cup B}}=\overline{A}\,\overline{B}$$

болғандықтан ықтималдықтың қасиеттері және (2) шарт бойынша

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B)+P(\overline{A}B)$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)=(1-P(A))(1-P(B))=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

Бұлардан өз кезегінде (4) теңдіктер орындалатыны шығады.

б) $P(A)=0$ болған жағдайды біз жоғарыда анықтамадан кейін бірден дәлелдеп к-рсеткенбіз. $P(A)=1$ жағдай үшін тұжырымның дұрыстығы оның $P(A)=0$ үшін дұрыстығының және ә) жағдайынан шығады (себебі $P(A)=0$ болса, онда $P(\overline{A})=1$ және керісінше).

Бұл қасиеттен шығатын мына фактіні ерекше атай кетелік: *ақиқат оқиға мен кез келген басқа оқиға тәуелсіз және де мүмкін емес оқиға мен кез келген басқа оқиға тәуелсіз*. Әрине, бұлай болатындығын Ω және $\varnothing$ оқиғаларының анықтамасынан-ақ көруге болатындығын байқауға болатын еді.

в) Бұл қасиет төмендегі теңдіктерден шығады:

$$P(A(B_1+B_2))=P(AB_1+AB_2)=P(AB_1)+P(AB_2)=$$
$$=P(A)P(B_1)+P(A)P(B_2)=P(A)(P(B_1)+P(B_2))=P(A)P(B_1+B_2)$$

♦

Есеп. Егер $B_1B_2=\varnothing$ шарты орындалмаса тұжырымның в) жағдайы әрқашан дұрыс бола бермейтіндігінің мысалын келтіріңіз.

Әдетте біз анықтаған екі оқиғаның тәуелсіздігін *стохастикалық* немесе *статистикалық* тәуелсіздік деп атайды және бұл ұғымдар әдебиетте синоним ұғымдар ретінде қолданылады. Мұндай тәуелсіздік көп жағдайда (2) қатынас арқылы табылып, анықталып көрсетілмейді, басқаша қандай да бір сырттай пайымдаулар арқылы постулат түрінде беріледі. (2) формула арқылы тәуелсіз оқиғалардың ықтималдықтары $P(A)$ мен $P(B)$ арқылы олардың көбейтіндісінің ықтималдығы $P(AB)$-ны есептейміз.

A және B оқиғаларының тәуелсіздігін анықтау (дәлелдеу) үшін к-біне мына қағиданы пайдаланады: *нақты бейнелері* $\tilde{A}$ мен $\tilde{B}$ тәуелсіз болатын A, B оқиғалары стохастикалық түрде де тәуелсіз болады. Бұл қағиданың нақты мағынасын жиіліктің орнықтылық қасиетімен байланыстыруға болады. Шындығында да n бақылау (тәжірибе) нәтижесінде $\tilde{A},\tilde{B}$ және $\tilde{A}\,\tilde{B}$ оқиғалары $n(\tilde{A}),n(\tilde{B}),n(\tilde{A}\tilde{B})$ рет пайда болған болсын. Онда жиіліктің орнықтылық қасиетінен мыналар шығады

$$\frac{n(\tilde{A})}{n}\approx P(A),\ \frac{n(\tilde{B})}{n}\approx P(B),\ \frac{n(\tilde{A}\tilde{B})}{n}\approx P(AB),\ \frac{n(\tilde{A}\tilde{B})}{n(\tilde{B})}\approx P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Ары қарай A және B оқиғаларының тәуелсіздігінен, яғни $P(A/B)=P(B)$ шартынан

$$\frac{n(\tilde{A}\tilde{B})}{n(\tilde{B})}\approx\frac{n(\tilde{A})}{n}$$

болатындығы, ал бұдан

$$\frac{n(\tilde{A}\tilde{B})}{n}\approx\frac{n(\tilde{A})}{n}\cdot\frac{n(\tilde{B})}{n} \qquad (5)$$

болатындығы шығады. Ешқандай себепсіз тәуелсіз болатын нақты оқиғалар үшін (5) формула адамзаттың іс жүзіндегі ғасырлар бойы бақылауларының нәтижесінде дәлелденген, ал бұл соңғы факт бізге жоғарыдағыдай қағиданы тұжырымдауға мүмкіндік берді.

¦сынылған қағида ешқандай жағдайда да теорема бола алмайтынын атап -ту керек. Математикалық модельдің терминінде айтылмағандықтан ол ешуақытта теорема бола алмайды да. Сонымен бірге, әрине, оқиғалардың стохастикалық тәуелсіздігінен олардың нақты бейнелерінің тәуелсіздігі шыға бермейді. К-п жағдайларда стохастикалық тәуелсіздікке тек есептеулер арқылы ғана к-з жеткізуге болады. Егер ықтималдықтық модельді сәл-пәл -згертсе тәуелсіздік жойылып кетуі (оқиғалар тәуелді болып шығуы) де мүмкін.

Мысалдар.

1) Екі ойын сүйегі лақтырылған. Бірінші ойын сүйегінде “бір” ұпай түсті (A оқиғасы), екінші ойын сүйегінде “екі” ұпай түсті (B оқиғасы) және түскен ұпайлардың қосындысы 3-тен артпайды (C оқиғасы) деген оқиғаларды қарастыралық. Онда

$$\Omega = \{(i,j): i,j = 1,\ldots,6\},\ A = \{(1,j): j = 1,\ldots,6\},\ B = \{(i,2): i = 1,\ldots,6\},$$
$$C = \{(i,j): i + j \le 3\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

болғандықтан

$$P(A) = \frac{1}{6},\ P(B) = \frac{1}{6},\ P(AB) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = P(A)P(B).$$

Сонымен бірге

$$P(C) = \frac{1}{12}, \qquad P(AC) = \frac{1}{18}$$

демек

$$P(AC) = \frac{1}{18} \ne \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6} = P(A)P(C)$$

Айтылғандар A және B оқиғаларының (стохастикалық) тәуелсіз оқиғалар болатындығын, дегенмен A мен C оқиғаларының тәуелді оқиғалар болатындығын көрсетеді. Сол сияқты B мен C оқиғалары да тәуелді оқиғалар болады екен.

2) Берілген a,b,c,d әріптерінен құрастыруға болатын барлық 4!=24 алмастырулардың әрқайсысының ықтималдығын $\frac{1}{24}$ тең болсын деп есептелік. Онда “a әрпі b әрпінің алдында“ және “c әрпі d әрпінің алдында” тұрады деген оқиғалардың тәуелсіздігі интуитивті түрде түсінікті, мұны тексеру де онша қиын емес (тексеріңіз!).

3) Үш баласы бар отбасыларын (жанұяларын) қарастыралақ және де барлық *ұұұ, ұұқ, ұқұ,... ,қққ* сегіз нәтиже (*ұ*-ұл,*қ*-қыз дегенді білдіреді және *ұқұ*-ең үлкені мен ең кішісі ұл, ортаншысы қыз бала дегенді білдіреді т.с.с.) тең ықтималдықты болсын. Мынадай оқиғалар енгізелік: A-отбасында ұл да, қыз да бар; B-отбасындағы қыздар саны бірден аспайды. Онда $P(A) = \frac{3}{4}$

$P(B) = \frac{1}{2},\ \ P(AB) = \frac{3}{8}$; яғни $P(AB) = P(A)P(B)$: *үш баласы бар отбасылар үшін A мен B оқиғалары тәуелсіз.* Бірақ екі не төрт балалы отбасылар үшін бұл оқиғалар тәуелсіз оқиғалар болмайды екен (көрсетіңіз!).

Енді мынадай жағдайды қарастыралық - екеуара тәуелсіз, яғни мына шарттар орындалатын A, B, C оқиғалары берілген:

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A)P(B) \\
P(BC) &= P(B)P(C) \qquad (6) \\
P(AC) &= P(A)P(C)
\end{aligned}
$$

Бұл шарттардан, айталық, AB және C оқиғаларының тәуелсіздігі, яғни мына шарт орындалатындығы

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \qquad (7)$$

шыға ма деген сұрақ қоялық. Іс жүзінде әруақытта дерлік осылай болады екен де, бірақ жалпы жағдайда (6) шарттардан (7) шарт шыға бермейді екен. Мысалдар келтірелік.

4) *Бернштейннің мысалы.* Айталық, бізге біртекті материалдан жасалған тетраэдр берілген болсын және оның үш жағы үш түрлі бояуға- *қызыл* (A-оқиғасы), *көк* (B-оқиғасы) және *жасыл* (C-оқиғасы), ал т-ртінші жаЄы осы үш бояудың үшеуіне де (ABC-оқиғасы) боялған болсын. Тәжірибе осы тэтраэдрді бір рет лақтырудан тұрсын және тэтраэдр қандай түске боялған жағымен құласа, сол оқиға пайда болды деп есептелік.

Онда $P(A) = \frac{1}{2},$ себебі тэтраэдрдің барлығы т-рт жағы бар, ал оның ішінде қызыл бояуға боялған жақтарының саны екеу. Дәл осы сияқты $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ және де $P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$ яғни (6) шарттар орындалады (оқиғалар екеуара тәуелсіз). Бірақ

$$\frac{1}{4} = P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

демек (7) шарт орындалмайды.

5) $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ болсын және $P(\omega_i) = \frac{1}{4}$ болсын $(i = 0,1,\ldots,3)$ Мынадай оқиғаларды енгізелік: $A_i = \{\omega_0, \omega_i\}, \quad i = 1,2,3$. Онда

$$P(A_i A_j) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A_i)P(A_j) \quad (i, j = 1,2,3;\ i \neq j),$$

бірақ

$$\frac{1}{4} = P(A_1 A_2 A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$$

Демек A_1, A_2, A_3 оқиғалары екеуара тәуелсіз, бірақ $A_i A_j$ оқиғасы мен A_k оқиғасы ($i, j, k = 1,2,3;$ және әртүрлі индекстер) тәуелді оқиғалар болады.

Іс жүзінде біздегі 5-ші және 6-шы мысал бір есеп (бір модельге келтірілетін есеп) екенін аңғару қиын емес.

6) Үш a, b, c әріптерінен құрастырылған барлық 3!=6 алмастыруларды және $(a,a,a), (b,b,b), (c,c,c)$ үш үштігін, барлығы тоғыз үштікті элементар оқиғалар кеңістігі ретінде қарастыралық та олардың әрқайсысына $\frac{1}{9}$ тең ықтималдықты сәйкес қоялық. A_k, B_k, C_k, арқылы k-ші орында сәйкес a,b,c әріптері тұратынын білдіретін оқиғаларды белгілелік (k=1,2,3). Онда $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$ және $P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{9}$ демек A_1, A_2, A_3 оқиғалары *екеуара тәуелсіз* оқиғалар. Бірақ, мәселен A_1A_2 оқиғасы мен A_3 оқиғасы тәуелсіз оқиғалар болмайды, себебі $P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{9}$. (Оны мынадан да көруге болады- A_1 және A_2 оқиғалары пайда болған сайын A_3 оқиғасы да пайда болады, яғни $A_1A_2 \subseteq A_3$: егер алмастыруда бірінші орында a, екінші орында b тұрса, онда үшінші орында міндетті түрде c тұрады).

B_k, C_k оқиғалары үшін де $P(B_k)=P(C_k)=\frac{1}{3}$ және де $P(A_iB_j)=P(A_iC_k)=P(B_jC_k)=\frac{1}{9}$ (мұндағы i, j, k әртүрлі индекстер). Сондықтан индекстері әртүрлі A_i, B_j, C_k оқиғалары да екеуара тәуелсіз оқиғалар болады. Бірақ алмастыруда алғашқы екі орында тұрған әріптер үшінші орында тұрған әріпті бірмәнді анықтайтын болғандықтан, мәселен, C_3 оқиғасы және алғашқы екі орында тұрған әріптерге қатысты A_1A_2, және $A_1B_2,\ldots,C_1C_2$ (барлығы тоғыз оқиға) оқиғалары *тәуелсіз емес*.

Егер A, B, C оқиғалары үшін (6) қатынаспен (екеуара тәуелсіздік) қатар (7) қатынас та орындалса, олар үшін *стохастикалық тәуелсіз* терминін қалдырған ж-н, себебі бұл теңдік A мен BC, B мен AC және C мен AB оқиғаларының да тәуелсіздігін қамтамасыз етеді. Одан басқа, мәселен $A \cup B$ оқиғасы мен C оқиғасы да (және сәйкес $A \cup C$ мен B, $B \cup C$ мен A) тәуелсіз оқиғалар болады екен.

Шындығында да бұл жағдайда ықтималдықтарды қосу формуласы бойынша

$$P\big((A \cup B)C\big)=P\big(AC \cup BC\big)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$

Енді (6) мен (7) формулаларын еске алсақ:

$$P\big((A \cup B)C\big)=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)=$$
$$=\big(P(A)+P(B)-P(A)P(B)\big)P(C)=P(A \cup B)P(C).$$

Егер тәуелсіз оқиғаларға қарама-қарсы оқиғалардың да тәуелсіз оқиғалар болатынын, олардың біреуі мен екіншісіне қарама-қарсы оқиға да тәуелсіз оқиғалар болатынын т.с.с. (жоғарыдағы тұжырымды қараңыз) ескерсек, онда (6) мен (7) шарттар орындалған жағдайда жоғары да айтылғандардан $\overline{A}\,\overline{B}$ және C, AB және $\overline{C}$ т.с.с. оқиғалардың да тәуелсіз оқиғалар болатынын, жалпы айтқанда олардың екеуі бойынша құрастыруға мүмкін болатын оқиғалардың үшіншісіне тәуелсіз болатынын қамтамасыз ететінін байқаймыз. Сондықтан да кез келген $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары үшін тәуелсіздіктің мынадай анықтамасын беру түсінікті.

Анықтама. Айталық $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары берілсін. Егер кез келген $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n,\ \ r = 2,3,\ldots,n$ индекстері үшін мына шарттар

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_r}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_r}) \qquad (8)$$

орындалатын болса, онда біз $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларын *жиынтықта тәуелсіз* немесе *-зара тәуелсіз* немесе (қысқаша) *тәуелсіз* оқиғалар деп атаймыз.

Бұдан былай қарай біз көбінесе келтірілген анықтама жағдайында *тәуелсіз* терминін қолданамыз да, бұл ұғым әрбір екі оқиғаға байланысты айтылса оны *екеуара тәуелсіз* деп ерекше бөліп айтатын боламыз.

(8) формула арқылы барлығы n оқиғаның тәуелсіздігінің шарты ретінде іс жүзінде $2^n - n - 1$ қатынас жазылған. Шындығында да r =2 болса, онда (8) формулаға сәйкес C_n^2 теңдік

$$P(A_i A_j) = P(A_i) P(A_j) \ \ (1 \le i < j \le n) \qquad (8_2)$$

r =3 болса, онда сәйкес C_n^3 теңдік

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i) P(A_j) P(A_k) \qquad (8_3)$$

т.с.с. ең соңында $r = n$ болса сәйкес $C_n^n = 1$ теңдік

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2) \ldots P(A_n) \qquad (8_n)$$

жазылған. Сонда барлық теңдіктердің саны

$$C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - n - 1$$

Біздің келіскеніміз бойынша (8_2) қатынастары $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының *екеуара тәуелсіздігін* білдіреді.

Тәуелсіздік үшін талап етілген (8) жүйе күрделі шарттар жүйесі ретінде ой қалдырады. Бірақ к-бінесе олардың орындалатынының ақиқаттығын тексерудің қажеті шамалы болып келеді- олардың орындалатындығына жоғарыда біз келтірген қағида арқылы оп-оңай к-з жеткізуге болады.

Анықтамадан, егер $A_1, A_2,..., A_n$ тәуелсіз оқиғалар болса, онда олардың ішінен алынған кез-келген $A_{i_1}, A_{i_2},..., A_{i_n}$ оқиғаларды да тәуелсіз оқиғалар болатындығы шығады. Анықтамадан және де шартты ықтималдықтардың мынадай қасиеті шығады.

Тұжырым. Егер $A_1, A_2,..., A_n$ оқиғалары тәуелсіз оқиғалар болса, $i_1, i_2,..., i_r$ және $j_1, j_2,..., j_k$ индекстері 1,2,...n жиынынан алынған әртүрлі индекстер болса, және $P(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_r}) > 0$ шарты орындалса, онда

$$P(A_{j_1} A_{j_2} ... A_{j_k} / A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_r}) = P(A_{j_1} A_{j_2} ... A_{j_k}) \qquad (9)$$

Дәлелдеу. $A_1, A_2,..., A_n$ оқиғалары тәуелсіз болғандықтан $A_{i_1}, A_{i_2},..., A_{i_r}$ оқиғалары да, және -з кезегінде $A_{j_1} A_{j_2} ... A_{j_k}$ оқиғалары да тәуелсіз оқиғалар, сондықтан

$$P(A_{j_1} A_{j_2} ... A_{j_k}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) ... P(A_{j_k}), \quad P(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_r}) = P(A_{i_1}) ... P(A_{i_r})$$

Сонымен бірге

$$P(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_r} A_{j_1} A_{j_2} ... A_{j_k}) = P(A_{i_1}) \cdot ... \cdot P(A_{i_r}) P(A_{j_1}) \cdot ... \cdot P(A_{j_k})$$

Енді (9) формуланың сол жағындағы шартты ықтималдықты ашып, сосын қазір ғана жазылған қатынастарды пайдалансақ, онда оның оң жағындағы шама шығады.